

В. І. Цоцко*, Т. С. Хохлова**

Дніпропетровський державний аграрний університет** Державний інститут підготовки та перепідготовки кадрів промисловості***ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИСТАЛІЗАЦІЇ
ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ МЕТАЛУ**

У дослідженнях за поверхневим легуванням виливків був накопичений матеріал, що вказував на обмеження глибини легування поверхневого шару металу. Знаходження закону руху фронту кристалізації у поверхневому шарі металу виливків дає інформацію про шляхи терморегуляції поверхневого шару виливків під час тверднення з метою формування в металі заданих властивостей. Аналітичним та чисельними методами моделюється процес кристалізації поверхневого шару металу у формі. Розглядаються спрощена та розгорнута модель з осьовою симетрією. Поставлена задача про фазовий перехід була розв'язана методом скінчених різниць з використанням неявної схеми для складання системи різницевих рівнянь. На прикладі конкретної системи – вушок виливків траків гусениць, які виливались з високо марганцевої зносостійкої сталі 110 Г13Л (сталі Гадфільда) було визначено закон переміщення фронту кристалізації у поверхневому шарі металу. Одержані швидкості охолодження поверхневих шарів металу виливків у процесі затвердіння дозволяють оцінити величину механічних напружень і темпи зміни коефіцієнтів дифузії компонентів при поверхневому легуванні металу.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, кристалізація, швидкість охолодження, метал.

В исследованиях по поверхностному легированию отливок был накоплен материал, указывающий на ограничение глубины легирования поверхностного слоя металла. Нахождение закона движения фронта кристаллизации в поверхностном слое металла отливок дает информацию о путях терморегуляции поверхностного слоя отливок во время затвердения с целью формирования в металле заданных свойств. Аналитическим и численным методами моделируется процесс кристаллизации поверхностного слоя металла в форме. Рассматриваются упрощенная и развернутая модель с осевой симметрией. Поставленная задача о фазовом переходе была решена методом конечных разностей с использованием неявной схемы для составления системы различных уравнений. На примере конкретной системы – проушин отливок траков гусениц, которые отливались из высокомарганцевой износостойкой стали 110 Г13Л (стали Гадфильда), был определен закон перемещения фронта кристаллизации в поверхностном слое металла. Полученные скорости охлаждения поверхностных слоев металла отливок в процессе затвердения позволяют оценить величину механических напряжений и темпы изменения коэффициентов диффузии компонентов при поверхностном легировании металла.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, кристаллизация, скорость охлаждения, металл.

In the course of study of cast surface alloying we accumulated material indicating limitation of the depth of metal surface alloying. Discovery of the law of displacement of crystallization front in the cast metal surface gives information about ways of thermal regulation of the cast surface layer during its hardening for the purpose of formation of the desired properties in the metal. The process of crystallization of metal surface in a mold box is simulated with the analytical and numerical methods. A simplified and expanded model with axial symmetry is considered. The law of displacement of crystallization front in the metal surface has been obtained. The designated problem about phase transition was solved by the method of finite differences with application of implicit scheme for composition of a scheme of different equations. By the example of a specific system – casts of lugs of caterpillar trucks that were cast from high-manganese wear-resisting steel 110Г13Л (Hadfield steel) the law of displacement of crystallization front in the metal surface was determined. The obtained rates of cooling of cast metal surfaces during the hardening process will make it possible to estimate the scope of mechanical stresses and rate of change of component diffusion coefficients during surface alloying of metal.

Key words: thermal conductivity equation, crystallization, cooling rate, metal.

Вступ

У [1–4] по поверхневому легуванні виливків накопичений матеріал, що вказує на обмеження глибини легування поверхневого шару металу. Дане обмеження пов'язане з швидкістю переміщення кристалізаційного фронту. Знаходження закону руху фронту кристалізації у поверхневому шарі металу виливків дозволить одержати інформацію про шляхи терморегуляції поверхневого шару виливків під час тверднення з метою формування в металі заданих властивостей. Інформація про положення кристалізаційного фронту при визначених температурних умовах зовнішнього середовища дозволить контролювати температурне поле та температурні градієнти поверхневого шару металу, оптимально змінювати їх і керувати, таким чином, процесами структуроутворення і формування необхідних фізичних властивостей.

У рамках спрощеної напівнескінченої одновимірної моделі системи «ливарна форма – рідкий розплав» процес кристалізації розплаву після заливання його в форму максимально просто описується аналітично [5, с. 259–261].

Нехай розплав після заливки до форми має постійну температуру c_p . Температура кристалізації розплаву c^* ($c^* < c_p$). Для випадку плоскої задачі, поверхня розділу фаз (фронт кристалізації) є площина $x = \xi(t)$, що рухається в позитивному напрямку осі « x » (на поверхні $x = 0$ весь час підтримується постійна температура $c_c < c^*$).

Тоді задача про розподіл температури при наявності фазового переходу і про швидкість руху межі розділу фаз усередині розплаву, що кристалізується (задача Стефана або задача про фазовий перехід), шляхом застосування методу подібності зводиться до розв'язку алгебраїчного рівняння відносно невідомого α

$$\frac{k_1 c_c \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}\right)}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c_p \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}\right)}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \rho \alpha, \quad (1)$$

де α – параметр що визначає закон руху межі кристалізації: $\xi = \alpha\sqrt{t}$, k_1 , a_1^2 і k_2 , a_2^2 – коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності твердої і рідкої фаз відповідно, $\Phi(s)$ – інтеграл похибок, який часто позначають як $\text{erf}(s)$,

$$\Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-y^2) dy.$$

Розв'язуючи дане трансцендентне рівняння, визначається значення параметра α .

Чисельний розрахунок параметра швидкості кристалізації α відповідно матеріалу, досліджуваному в роботах [1–4] (сталі 110Г13Л), дав наступне значення $\alpha = 0,216 \text{ мм/с}^{1/2}$.

Отриманий результат дозволяє оцінити час перебування поверхневого шару виливків у рідкому стані, а отже, передбачити ефективність і глибину насичення поверхневого шару легуючими елементами у процесі поверхневого легування виливків.

Спроба застосування аналітичного методу для визначення параметра швидкості кристалізації у випадку кінцевої моделі з осьовою симетрією, що більш точно відображувала реальний предмет дослідження – процес кристалізації поверхні виливків в області циліндричних отворів (вушок гусеничних траків), зіткнулась з певними труднощами.

Задача Стефана, подана в умовах системи з осьовою симетрією, зводиться до розв'язку рівняння теплопровідності в циліндричних координатах, причому, з

врахуванням симетрії тепловідведення за кутовою і осьовою координатами, можна обмежитись лише радіальною складовою оператора Лапласа в рівнянні теплопровідності.

Тоді при постійному коефіцієнті теплопровідності k у межах однієї фази рівняння теплопровідності буде мати вигляд

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

або

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3)$$

де T – температура, c і ρ – питома теплоємність і густина речовини, $a^2 = c\rho/k$ – коефіцієнт температуропровідності фази, r – відстань, відрахована від осі ливарного стрижня вдовж його радіуса, t – час процесу. Відмітимо особливість даного рівняння в точці $r=0$.

Нехай розплав, що заливається у форму має температуру T_p . Температура кристалізації розплаву T^* . Температура ливарного стрижня в момент заливки T_c ($T_c < T^* < T_p$). У процесі охолодження і кристалізації розплаву розподіл температури в ливарному стрижні буде змінюватися, але, внаслідок радіальної симетрії системи, градієнт температури на осі стрижня буде постійним і рівним нулю.

Температура розплаву з плином часу також змінюється – за рахунок передачі енергії до ливарного стрижня і через ливарну форму в навколишнє середовище. Серцевина розплаву в процесі затвердіння вилівка завжди буде мати більш високу температуру, ніж поверхневі шари. Отже, можна стверджувати про існування в глибині розплаву деякої області, в якій температурний градієнт змінює знак. Звизначимо зазначену область до циліндричної поверхні з радіусом r^{\wedge} .

Для неоднорідного середовища, коли коефіцієнти рівняння теплопровідності є розривними функціями, просторовий інтервал, в якому шукається розв'язок задачі, розбивається точками розривів коефіцієнтів на частини. У середині цих частин системи температура відповідає рівнянню теплопровідності, а в точках розриву задаються умови сполучення, які в найпростішому випадку зводяться до вимоги неперервності температури і неперервності теплового потоку (з урахуванням фазових перетворень).

Кристалізація розплаву, що вступив у тепловий контакт з ливарним стрижнем, починається не одразу, а через деякий час t_0 , за який розплав у точках контакту з ливарним стрижнем $r=r_0$, де r_0 – радіус стрижня, охолоне до температури кристалізації. Для даного інтервалу часу завдання про розподіл температури в системі ливарний стрижень–рідкий розплав зводиться до розв'язку рівнянь:

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad r_0 < r < r^{\wedge}; \quad (5)$$

де $T_0(r, t)$ і $T_2(r, t)$ – температури в стрижні і розплаві, a_0^2 , і a_2^2 – відповідні коефіцієнти температуропровідності.

Додаткові умови рівнянь (4) і (5) включають початкові розподіли температур у системі, а також граничні умови та умову сполучення:

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0,$$

$$k_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \text{ при } r = r_0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r^\wedge,$$

де k_0 і k_2 – коефіцієнти теплопровідності ливарного стрижня і розплаву відповідно.

Після досягнення температури кристалізації на поверхні контакту ливарного стрижня з розплавом починається утворення нової фази – застиглого розплаву. При цьому рівняння (4) і (5), з урахуванням диференціації системи, доповнюються рівнянням теплопровідності для кристалічної фази з температурою $T_1(r, t)$.

Для межі розділу твердої та рідкої фаз розплаву $r = r^* = \xi(t)$ різниця теплових потоків на межі компенсується прихованою теплотою фазового переходу

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=\xi-0} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=\xi+0} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}, \quad (6)$$

де λ – питома теплота кристалізації розплаву; $\rho = \rho_1$ – густина твердої фази при температурі кристалізації.

Застосування методу подібності для розв’язку вказаних рівнянь [5, с. 255], стандартного підходу для задачі кристалізації, в якому від змінних r і t переходять до однієї змінної z

$$z = \frac{r}{2\sqrt{t}}, \quad (0 < z < \infty) \quad (7)$$

і з рівнянь в окремих похідних (4) і (5) одержують звичайні диференціальні рівняння типу

$$-2z \frac{\partial f}{\partial z} = a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

звідки і знаходять загальне рішення

$$f(z) = -C_1 \int_z^\infty \frac{1}{z} \exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right) dz + C_2 \quad (8)$$

або

$$f(z) = -C_1 F\left(\frac{z}{a}\right) + C_2, \quad (9)$$

вводячи допоміжну функцію $F(x)$,

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{1}{x} \exp(-x^2) dx,$$

призводить до протиріччя при визначенні констант інтегрування розв’язку.

Дані протиріччя можна трактувати як неможливість застосування методу подібності для вирішення поставленої задачі. Неприйнятність методу пов’язується з асиметрією, неоднорідністю системи за координатою $z = \frac{r}{2\sqrt{t}}$. На відміну від початкових умов, перетворенням подібності

$$r' = kr, \quad t' = k^2 t, \quad (k - \text{стала}) \quad (10)$$

не відповідають граничні умови. Якщо для $r = 0$, подібність реалізується, то для умов $r=r_0$ і $r=r^\wedge$ граничні умови змінюються при перетвореннях (10). Причому, зважаючи на конечність значення r_0 , ситуацію не виправляє навіть перехід $r^\wedge \rightarrow \infty$.

Розв’язок задачі теплопровідності для даної системи можна отримати методом Фур’є у вигляді ряду з умовою сполучення теплових потоків на межі ливарного стрижня та розплаву. Зазначений розв’язок досить громіздкий. Тому, піс-

ля спроби знаходженні аналітичного розв'язку задачі Стефана для досліджуваної системи з осью симетрії, постає необхідність застосування іншого методу вирішення поставленого завдання.

Застосуємо для вирішення поставленої задачі чисельний метод – метод кінцевих різниць. Метод кінцевих різниць (сіток) є універсальним методом наближеного розв'язку диференціальних рівнянь, у тому числі і рівняння теплопровідності. У зазначеному методі область неперервної зміни аргументів (у нашому випадку r і t) замінюється кінцевою (дискретною) множиною точок – вузлів, а похідні, що входять до диференціального рівняння, замінюються (апроксимуються) відповідними різницевиими відношеннями; диференціальне рівняння при цьому замінюється системою алгебраїчних рівнянь (різницевиими рівняннями).

Застосуємо для визначення температур на новому (після шару t_j) часовому шарі t_{j+1} , де j – номер часового шару, неявну схему обчислення [5, с. 557] або схему з випередженням, як стійку схему при довільних часових τ і просторових h кроків, на відміну від явної схеми, стійкої лише при певному співвідношенні між ними [5, с. 611]. При цьому диференціальному оператору Lu

$$Lu = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

ставиться у відповідність різницевиий оператор $L_{ht} u_{ij+1}$

$$L_{ht} u_{i,j+1} = \frac{1}{a^2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} - \left(\frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} \right),$$

визначений на чотирьохточковому шаблоні (r_{i-1}, t_{j+1}) , (r_i, t_{j+1}) , (r_{i+1}, t_{j+1}) , (r_i, t_j) , де i і j – номери шарів відповідно просторової та часової змінних.

Отже, диференціальному рівнянню

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

буде відповідати система алгебраїчних рівнянь (різницевиих рівнянь)

$$\frac{1}{a^2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h}. \quad (11)$$

Виберемо крок просторової координати h сталим та достатньо малим у порівнянні з експериментально визначеними $r_0 = 12$ мм і $r^\wedge = 17$ мм – $h = 0,1$ мм. Тоді $r_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, 170$), причому $r_0 = r_{120}$, а $r^\wedge = r_{170}$.

Постановка різницевої задачі окрім побудови різницевого оператора включає написання також додаткових умов на сітці (закон написання різницевиих рівнянь і додаткових умов називають різницевою схемою).

Початкові умови задають розподіл температури на нульовому часовому шарі при $j = 0$:

$$u_{i,0} = c_c, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 119; \quad (12)$$

$$u_{i,0} = c_p, \quad i = 121, 122, \dots, 170. \quad (13)$$

Температура в 120-му просторовому шарі визначається нижче з умови ідеального теплового контакту.

Крайові умови зводяться до рівності пар сусідніх температур для довільних часових шарів j :

$$u_{0,j} = u_{1,j}; \quad (14)$$

$$u_{169,j} = u_{170,j}. \quad (15)$$

Умова ідеального теплового контакту в різницевій формі буде мати наступний вид:

$$k_0 \frac{u_{120} - u_{119}}{h} = k_2 \frac{u_{121} - u_{120}}{h}. \quad (16)$$

Неявні схеми для рівняння теплопровідності приводять до системи алгебраїчних рівнянь для значень шуканої функції $u_{i,j+1}$ на новому шарі $t = t_{j+1}$. Вказана система має вид [5, с. 590]

$$A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} + D_i = 0, \quad 0 < i < N \quad (17)$$

(в нашому випадку для стрижня $0 < i < 120$ і для розплаву $120 < i < 170$).

Зіставляючи рівняння (11) і (17), отримаємо вирази для різницевих коефіцієнтів рівняння ливарного стрижня та розплаву:

$$\begin{aligned} A_i &= a_0^2 \frac{\tau}{h^2}, & 0 < i < 120, \\ B_i &= a_0^2 \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{1}{i} \right), & 0 < i < 120, \\ C_i &= a_0^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i} \right) + 1, & 0 < i < 120, \\ D_i &= T_c & 0 < i < 120; \\ A_i &= a_2^2 \frac{\tau}{h^2}, & 120 < i < 170, \\ B_i &= a_2^2 \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{1}{i} \right), & 120 < i < 170, \\ C_i &= a_2^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i} \right) + 1, & 120 < i < 170, \\ D_i &= T_p, & 120 < i < 170. \end{aligned}$$

Причому, згідно до умови ідеального теплового контакту (16):

$$A_{120} = k_0, \quad B_{120} = k_2, \quad C_{120} = k_0 + k_2, \quad D_{120} = 0.$$

Для знаходження розв'язку системи (17) крім звичайних методів лінійної алгебри або методів ітерацій застосовують найбільш економічний метод – метод прогонки або факторизації [5, с. 591], який враховує спеціальний вигляд матриці системи рівнянь (7). У зазначеному методі розв'язок системи (17) шукають в вигляді

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

З (17) і (18) знаходять рекурентні формули для визначення коефіцієнтів α_{i+1} і β_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + D_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

З умови 1(4) визначаються значення $\alpha_1 = 1$ і $\beta_1 = 0$. За рекурентним формулами послідовно знаходяться всі інші коефіцієнти. Знаючи значення граничної температури u_N (обов'язкова умова), за формулою (8) справа наліво – від $i+1$ до i , визначаються $u_{N-1}, u_{N-2}, \dots, u_0$.

Розрахунок за вказаною схемою не дав бажаного результату, оскільки висока температура в зоні розплаву «тримала» температуру поверхневого шару виливка і перешкоджала процесу кристалізації.

Був застосований інший варіант формул прогонки [5, с. 592], коли використовується розв'язок системи (17) у вигляді

$$u_{i+1} = \alpha_{i+1}u_i + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (19)$$

де

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{B_i\beta_{i+1} + D_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

При цьому опорною температурою є температура u_0 – її задання визначає розрахунок всіх інших температур у вузлах. З умови (15) визначалися $\alpha_N = 1$ і $\beta_N = 0$, а потім послідовно знаходилися всі інші коефіцієнти α_i та β_i системи (19). За початковою умовою гранична температура u_0 визначена, і за її значенням зліва направо – від i до $i+1$, визначаються u_1, u_2, \dots, u_N . Для наступних часових шарів, згідно з умовою (14), в якості температури u_0 бралася температура u_1 з попереднього часового шару. Тим самим усувалася невизначеність граничної температури на осі ливарного стрижня і здійснювалося гнучке налаштування температурного градієнта осі на нульове значення.

На першому етапі був визначений час t_0 досягнення температури кристалізації $T^* = 1360^\circ\text{C}$ на поверхні контакту ливарного стрижня з розплавом ($r = r_0$) після заливки розплаву до форми ($t = 0$). Він становив $t_0 = 2,48$ мс. Після досягнення температури кристалізації на поверхні контакту ливарного стрижня з розплавом у ньому починає формуватися кристалічна фаза.

Вирази для різницевих коефіцієнтів у вузлах ливарного стрижня і у вузлах розплаву залишаться колишніми, тільки значення D_i в кожному новому часовому шарі будуть замінюватися попередніми значеннями температури в цих вузлах. Різницеві коефіцієнти вузлів розплаву, крім того, будуть починатися не з колишнього номера вузла ($i = 121$), а з наступних номерів – $i = 122, 123, \dots$

На границі ливарного стрижня з застиглим розплавом умова рівності теплових потоків у різницевій формі прийме вигляд (вважається, що фронт кристалізації вже досяг 121-го вузла):

$$k_0 \frac{u_{120} - u_{119}}{h} = k_1 \frac{u_{121} - u_{120}}{h} \quad \text{або} \quad k_0(u_{120} - u_{119}) = k_1(u_{121} - u_{120}) \quad (20)$$

Різницеве рівняння, відповідне умові фазового переходу на границі розділу твердого та рідкого розплаву в момент досягнення фронтом кристалізації першого після поверхні контакту зі стрижнем вузла кристалічної фази (121-го в наскрізній нумерації) матиме вигляд:

$$k_1 \frac{u_{121} - u_{120}}{h} = k_2 \frac{u_{122} - u_{121}}{h} + \lambda\rho \frac{h}{\tau}$$

або

$$k_1(u_{121} - u_{120}) = k_2(u_{122} - u_{121}) + \lambda\rho \frac{h^2}{\tau}. \quad (21)$$

Відповідно до рівнянь (20) і (21), різницеві коефіцієнти виразу (17), для вузлів, що поділяють фази, приймуть вигляд:

$$A_{120} = k_0, B_{120} = k_1, C_{120} = k_0 + k_1, D_{120} = 0;$$

і

$$A_{121} = k_1, B_{121} = k_2, C_{121} = k_1 + k_2, D_{121} = \lambda\rho h^2/\tau.$$

Використовуючи зворотну прогонку, варіюємо значенням часового кроку τ , так щоб розрахункова температура в 121-му вузлі досягла температури кристалізації ($T^* = 1360^\circ\text{C}$ або $u = 0$) і фіксуємо вказаний проміжок часу.

При подальшому розрахунку руху фронту кристалізації додаткова умова на поверхні затвердіння (21) зазнає зсуву від вузла до вузла в напрямку до r^\wedge . Різницеви коефіцієнти проміжних між r_0 і r^* вузлів знаходяться аналогічно, відповідно до різницевого рівняння (11), в якому коефіцієнт теплопровідності a^2 приймає значення коефіцієнта теплопровідності кристалічної фази $a^2 = a_1^2$, тобто за формулами:

$$A_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2}, \quad 120 < i < 170,$$

$$B_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i} \right), \quad 120 < i < 170,$$

$$C_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i} \right) + 1, \quad 120 < i < 170,$$

$$D_i = u_{i,j-1}, \quad 120 < i < 170,$$

де $u_{i,j-1}$ – температура в i -му просторовому шарі в попередньому до розрахункового (j -го) часовому шарі.

На рис. 1 наведено розподіл температур у системі ливарний стрижень ($0 < r < r_0$) – застиглий розплав ($r_0 < r < r^*$) – рідкий розплав ($r^* < r < r^\wedge$) у різні моменти часу t після початку кристалізації, при значеннях параметрів $r_0 = 12$ мм і $r^\wedge = 17$ мм. Координата r^* дорівнює відповідно 12,3 мм ($t = 3,28$ с); 12,6 мм ($t = 11,08$ с); 13,2 мм ($t = 27,83$ с); 14,4 мм ($t = 88,23$ с).

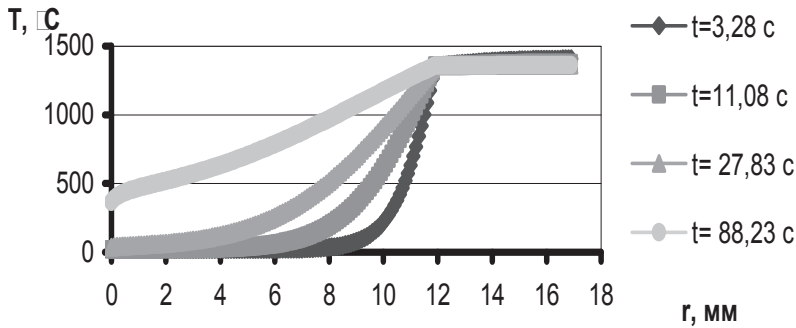


Рис. 1. Розподіл температур у системі ливарний стрижень – поверхневий шар виливка в різні моменти часу після початку кристалізації

У дійсності виливки траків в області вушок мають радіальну асиметрію. Реальна середина стінки виливка в області вушок знаходилася на відстані 16–18 мм від поверхні ливарних стрижнів. Проведений розрахунок для $r^\wedge = 17$ мм був доповнений аналогічними одновимірними розрахунками для $r^\wedge = 16$ мм і $r^\wedge = 18$ мм.

Залежність переміщення фронту кристалізації $\Delta r^* = r^* - r_0$ від часу Δt , відрахованого від моменту досягнення температури кристалізації на границі ливарного стрижня та розплаву ($\Delta t = t - t_0$), в кожному зазначеному випадку показана на рис. 2. Оскільки $t_0 = 2,48$ мс досить малий інтервал, то можна вважати $\Delta t = t$.

Лінійна залежність між переміщенням кристалізаційного фронту Δr^* і часом Δt за логарифмічними координатами (коефіцієнт кореляції [6, с. 445] більше 0,997) дозволяє стверджувати про існування лінійної кореляційної залежності між зазначеними змінними – $\ln(\Delta r^*)$ і $\ln(\Delta t)$.

Вирівнювання даних чисельного експерименту за степеневу кривою способом найменших квадратів [6, с. 319,325] дає наступну емпіричну формулу зв'язку між Δr^* і Δt :

$$\Delta r^* = \alpha \Delta t^\beta. \quad (22)$$

Для розмірностей $[\Delta r^*] = \text{мм}$ і $[\Delta t] = \text{с}$, коефіцієнти рівняння (22) дорівнюють відповідно: $\alpha = 0,149$ і $\beta = 0,623$ для $r^{\wedge} = 17 \text{ мм}$.

Відмінність величини β від значення $\beta = 1/2$ у розв'язку задачі Стефана для напівнескінченої одновимірної моделі [5, с. 255, 263] пов'язано з тим, що була розв'язана зовсім інша задача про фазовий перехід. Розглянута модель має не плоску форму нескінченних розмірів, а осьову симетрію (циліндричну форму) і конечні розміри, що дають неінваріантність рівняння теплопровідності і його граничних умов, щодо операції просторового зсуву. З цим і пов'язана незастосовність методу подібності до розв'язку поставленої задачі. Крім того, граничні умови задачі (температури на осі і, особливо, у середній частині розплаву при $r = r^{\wedge}$) весь час змінюються, внаслідок чого постійні граничні умови переходять у зміні, що відрізняє постановки зазначених задач.

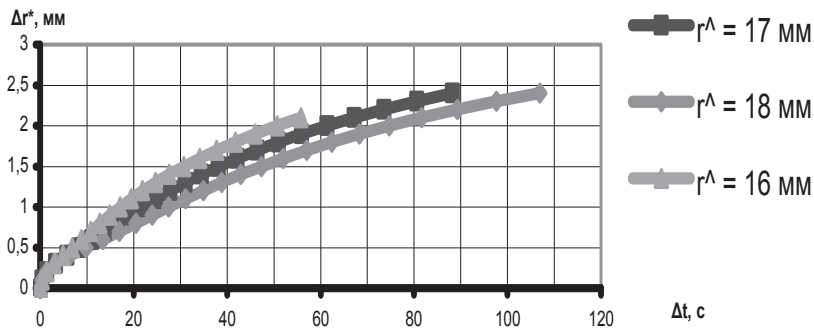


Рис. 2. Переміщення фронту кристалізації розплаву залежно від різних значень параметра r^{\wedge}

Відхилення показника степеня β від значення $1/2$ можна трактувати як зміну в часі постійної α в законі руху межі кристалізації (22) при $\beta = 1/2$.

$$\Delta r^* = \alpha(t)\sqrt{t} . \tag{23}$$

Зазначена теза підтверджується стабілізацією параметра α в рівнянні (23) при достатньому віддаленні фронту кристалізації від поверхні виливка, коли граничні умови наближаються до умов напівнескінченої моделі.

За даними залежності переміщення кристалізаційного фронту від часу були розраховані покрокова, середня та миттєва швидкості кристалізації поверхневого шару досліджуваної моделі. Для середньої товщини стінки виливка ($r^{\wedge} = 17 \text{ мм}$) на рис. 3 наведено графіки залежності вказаних швидкостей від часу.

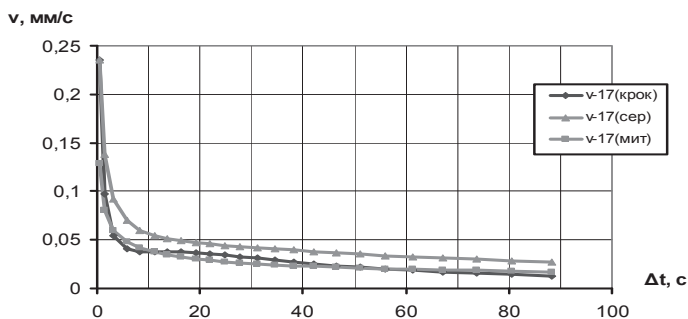


Рис. 3. Покрокова, миттєва і середня швидкості кристалізації поверхневого шару вушок ($r^{\wedge} = 17 \text{ мм}$)

За одержаними графіками можна прогнозувати найбільш оптимальний процес дифузійного насичення поверхневого шару виливків у інтервалі 5–25 с після

ля початку кристалізації, коли швидкість кристалізації стабільна і легуючі компоненти будуть рівномірно розподілятися в межах поверхневого шару. Характерно, що в даному часовому інтервалі відбувається кристалізація найбільш відповідального фрагмента поверхневого шару виливків у межах 0,4–1,0 мм.

Дослідження швидкості охолодження поверхневого шару моделі в процесі його кристалізації показали різке зниження вказаної швидкості від 24200 °C/с на поверхні вилівка і 1270 °C/с на відстані 0,2 мм від поверхні у початковий момент, до кількох градусів за секунду в подальшому.

Одержані швидкості охолодження поверхневих шарів металу виливків у процесі затвердіння дозволяють оцінити величину механічних напружень і темпи зміни коефіцієнтів дифузії компонентів при поверхневому легуванні металу.

Висновки

Поставлена задача про фазовий перехід для розплаву, що кристалізується в умовах осьової симетрії, була вирішена чисельно, методом кінцевих різниць, з використанням неявної схеми для складання системи різницевої рівнянь. Для обчислення значень температури (сіткової функції) в дискретних точках системи (у вузлах сітки) був застосований метод прогонки.

На прикладі конкретної системи – вушок виливків траків гусениць, які виливались з високомарганцевої зносостійкої сталі 110 Г13Л (сталі Гадфільда) було визначено час досягнення температури кристалізації на поверхні вушок після заливки розплаву у форму – $t_0 = 2,48$ мс. Знайдений закон переміщення фронту кристалізації в графічній і аналітичній формах. Відзначено і обґрунтовано відмінну отриманої залежності від аналогічної плоскої задачі для нескінченної однорідної моделі системи. Визначені швидкості охолодження поверхневих шарів металу виливків у процесі їх кристалізації.

Таким чином, проведені дослідження нестационарного поля температур при кристалізації розплаву в умовах осьової симетрії, на прикладі вушок виливків траків, дозволяють визначити характерні інтервали часу та глибини поверхневих шарів виливків, в яких ефективність поверхневого насичення виливків будуть оптимальними.

Бібліографічні посилання

1. **Tsotsko V. I.** Application of casting surface alloying for hardening surface of track pin holes. / V. I. Tsotsko, A. I. Burya, V. I. Shemavnev, G. M. Vorobyev// 2nd international Conference «Research and Development in Mechanical Industry» 2002, 01–04 September 2002, Vrnjačka Banja, Yugoslavia, V. 2, S. 1100-1105.
2. **Рядно А. А.** Численно-аналитическое определение скорости кристаллизации расплава в условиях осевой симметрии на примере проушин отливок траков / А. А. Рядно, В. И. Цоцко, Б. И. Пелешенко // Математичне моделювання. –2008. – 2 (19). – С. 22-25.
3. **Цоцко В. І.** Метод аналізу швидкості кристалізації розплаву у при поверхневому шарі ливарного виробу / В. І. Цоцко, Б. Г. Пелешенко, І. Й. Перкатюк // Фізика і хімія твердого тіла. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 233-235.
4. **Цоцко В. І.** Легування поверхневого шару ливарної заготовки в процесі лиття / В. І. Цоцко, Б. Г. Пелешенко, П. І. Мельник // Металознавство та обробка металів. – 2009. – № 2. – С. 27-30.
5. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский// – М., 1972. –736 с.
6. **Маркович Э. С.** Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики /Э. С. Маркович// М., 1972. – 480 с.

Надійшла до редколегії 12.07.12.