УДК 539.12.01 519.46

С. Н. Антропов
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МЕМБРАН

Властивості симетрії рівняння релятивістських мембран, що розглядаються як рівняння для істотно-нелінійного скалярного поля типу Борна-Інфельда, дозволили виконати пошук точних рішень із застосуванням методів групового аналізу і групи Лі точкових перетворень, які ним допускаються. При знаходженні рішень використані всі неподібні групи Н рангу 2 з оптимальної системи підгруп групи Пуанкаре Р(1, 3). Відповідні розрахунки, для скорочення, опущені та істотно засновані на понятті симетрії диференціальних рівнянь у сенсі С. Лі. Для рівняння релятивістських мембран у непараметричному уявленні побудована система часткових рішень – оптимальна система інваріантних Н-рішень рангу 1. У списку вказані: шукана функція у вигляді проекції в простір інваріантів тієї або іншої групи Н, фактор-рівняння, що задає функцію однієї змінної, і його рішення (в деяких випадках - виражено в квадратурі). За побудовою, всі вказані рішення цього рівняння можна отримати з такої системи за допомогою скінчених перетворень його симетрії – групи Пуанкаре Р(1, 3) рухів простору незалежних і залежної змінних.

Ключові слова: група Пуанкаре, релятивістські мембрани, інваріантні рішення.

Свойства симметрии уравнения релятивистских мембран, рассматриваемого как уравнение для существенно-нелинейного скалярного поля типа Борна-Инфельда, позволили выполнить поиск точных решений с применением методов группового анализа и допускаемой им группы Ли точечных преобразований. При нахождении решений использованы все неподобные группы Н ранга 2 из оптимальной системы подгрупп группы Пуанкаре Р(1, 3). Соответствующие расчеты для краткости опущены и существенно основаны на понятии симметрии дифференциальных уравнений в смысле С. Ли. Для уравнения релятивистских мембран в непараметрическом представлении построена система частных решений – оптимальная система инвариантных Н-решений ранга 1. В списке указаны: искомая функция в виде проекции в пространство инвариантов той или иной группы Н, фактор-уравнение, задающее функцию одной переменной, и его решение (в некоторых случаях – выражено в квадратурах). По построению, все указанные решения уравнения релятивистских мембран можно получить из такой системы с помощью конечных преобразований его симметрии – группы Пуанкаре Р(1, 3) движений пространства независимых и зависимой переменных.

Ключевые слова: группа Пуанкаре, релятивистские мембраны, инвариантные решения.

Properties of symmetry of equation of relativistic membranes, examined as equation for the substantially-nonlinear scalar field of Born-Infeld type, allowed to execute the search for exact solutions by the group analysis methods and admissible Lie group of point transformations. For finding of such solutions all of dissimilar H-groups of rank 2 are used from the optimal system of sub-groups of the Poincare group P(1, 3). The proper calculations for short are omitted and substantially based on the concept of symmetry of differential equation in S.Lie sense. The system of partial solutions – the optimal system of invariant H-solutions of rank 1 – is built for the equation of relativistic membranes in the nonparametric representation. The list indicates: the decision function as a projection in the space of invariants of one or another H-group, the factor-equation, defining the function of a single variable, and its solution (some of them are shown in quadrature). As designed, all the solutions pointed may be obtained for this equation from such the system by the finite transformations of its symmetry – the Poincare group P(1, 3) of motions of the space of independent variables as well as dependent one.

Key words: Poincare group, relativistic membranes, invariant solutions.

Введение

Значительные успехи методов Монте-Карло в полевых моделях на решетке (см. [1] и цитированную литературу), в исследованиях кристаллических решеток [2] не сопровождаются, к сожалению, ростом числа известных точных решений нелинейных моделей. В случае же существенно-нелинейных полей [3] чуть ли ни единственный успешный подход в математической физике демонстрирует теория групп. В данной работе построены некоторые частные решения уравнения релятивистских мембран на основе группового анализа соответствующего уравнения.

Интерес к теории *n*-мерных экстремальных поверхностей мотивируется рядом приложений в релятивистской физике. Это скалярное поле типа Борна-Инфельда [4], струны [5], задача двух тел (о мировой поверхности, стягивающей мировые траектории частиц [6]), – при $n = 2$ – и мембраны [7], $n = 3$. Теория мембран применялась также к неабелевым калибровочным моделям [8], и в настоящее время – после I и II суперструнных революций [9 – 10] – М-браны являются кандидатом на единую унифицирующую теорию всех видов сил и форм материи [11 – 13].

При $n = 2$ любая поверхность является (локально) конформно плоской, что в большинстве случаев и используется для интегрирования уравнений, задающих экстремальные 2-поверхности. Однако при $n > 2$ получить общие решения не удается. Некоторые цилиндрически- и сферически-симметричные мембраны построены в [7], $n = 3$. Различные редукции и некоторые решения классических уравнений движения релятивистской мембраны даны в [14; 15] а обобщение струнного подхода к физике элементарных частиц рассмотрено в [16; 17].

Оптимальная система частных инвариантных *H*-решений

Ниже для уравнения релятивистских мембран (1) построена оптимальная система частных инвариантных *H*-решений ранга 1 [18]. Соответствующие расчеты для краткости опущены и существенно основаны на понятии симметрии дифференциальных уравнений в смысле С. Ли. Последняя находит содержательное применение в физике при интерпретации некоторых решений [18; 19].

Получать новые частные решения методами [18] позволила обнаруженная ранее [20] для уравнения экстремальных гиперповерхностей в непараметрическом представлении

$$(1 - u_k^2)\, u_{ii} + u_i\, u_k\, u_{ik} = 0;\; u_k \equiv \partial u/\partial x^k,\; u_{ik} \equiv \partial^2 u/\partial x^i\, \partial x^k,\; u_k^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2,\; i,k = 0,1,2\,, \quad (1)$$

инвариантность относительно группы $P(1,\,3)$ движений пространства независимых x^0, x^1, x^2 и зависимой $x^3 \equiv u$ переменных

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu},\; \delta x^{\mu} = a^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x^{\nu};\; \mu, \nu = 0,1,2,3, \quad (2)$$

где параметры a^{μ} – соответствуют трансляциям, $\omega^{\mu\nu}$ – вращениям псевдоевклидова пространства сигнатуры (+ – – –).

При нахождении решений использованы все неподобные группы *H* ранга 2 из оптимальной системы подгрупп группы Пуанкаре $P(1,3)$ [21]. По построению, из приводимой ниже системы решений с помощью конечных преобразований группы (2) можно получить все инвариантные решения ранга 1.

Подгруппы H представлены генераторами, из которых P_μ – трансляции, L_i – вращения, K_i – бусты [21]

$$P_\mu = \partial/\partial x^\mu, L_i = \varepsilon_{ijk} x^k \partial/\partial x^j, K_i = x_0 \partial/\partial x^i - x_i \partial/\partial x^0, \varepsilon_{123} = 1 \ .$$

Далее в списке указаны: искомая функция u в виде проекции в пространство инвариантов той или иной группы H, фактор-уравнение, задающее функцию z одной переменной, и его решение. Приняты обозначения

$\tau = u + x^0, r = x_1{}^2 + x_2{}^2, \theta = u^2 - x_0{}^2$; A, B – константы интегрирования.

1. L_3, K_3. $\quad u^2 = x_0{}^2 + z(r)$, $\quad z''zr + z'^3 r/2 - z'^2 r + z'z - z/2 = 0$.

2. $L_2 + K_1, L_1 - K_2$. $\quad \theta + r = z(\tau)$, $\quad z''\tau^2 - 6z'\tau + 6z = 0$, $\quad z = A\tau + B\tau^6$.

3. $L_3, P_0 - P_3$. $\quad u = -x^0 + z(r)$, $\quad z'^3 r = 0$, $\quad z = B$.

4. L_3, P_0. $\quad u = z(r)$, $\quad z''r + 2z'^3 r + z' = 0$, $\quad z = A - (B - r)^{1/2}$.

5. K_3, P_1. $\quad u^2 = x_0{}^2 + z(x^2)$, $\quad zz'' - z'^2 - 2z = 0$, $\quad Bz = \mathrm{ch}^2(\pm B^{1/2} x^2 + A)$.

6. $L_2 + K_1,\ P_0 - P_3$.

$P_0 - P_3,\ P_1$. $\quad u = -x^0 + z(x^2)$.

7. $L_2 + K_1,\ P_2$. $\quad \theta + x_1{}^2 + z(\tau) = 0$, $\quad -z''\tau^2 + 4z'\tau - 4z = 0$, $\quad z = A\tau + B\tau^4$.

8. P_1, P_2. $\quad u = z(x^0)$. $\quad z'' = 0$, $\quad z = Ax^0 + B$.

9. $L_2 + K_1, L_1 - K_2 + P_2$. $(\theta + x_1{}^2)(1 + \tau^{-1}) + x_2{}^2 = z(\tau)$, $\quad z''(1+\tau)^2(3+\tau^{-1})^{-1} - 2z'(1+\tau) + 2z = 0$,

$$z = A\tau + B\tau^3(6\tau^2 + 15\tau + 10)(1+\tau).$$

10. $L_3 + \varepsilon(P_0 + P_3),\ P_0 - P_3,\ \varepsilon = \pm 1$. $\quad u = -x^0 + 2\varepsilon\, arctg(x^1/x^2) + z(r)$, $\quad z'' + z'^3 r/2 + 3z'/(2r) = 0$,

$$\pm z = 2\varepsilon\, arctg(Br - 1)^{1/2} + A.$$

11. $L_3 + aP_3,\ P_0,\ a \neq 0$. $\quad u = a\, arctg(x^1/x^2) + z(r)$, $\quad z''(r + a^2) + z'(1 + 3a^2(2r)^{-1} + 2z'^2 r) = 0$,

$$\pm z = -arctg(\lambda/a) + 2^{-1}B^{-1/2}\ln\left|(1 + B^{1/2}\lambda)/(1 - B^{1/2}\lambda)\right| + A, \quad \lambda^2 = (r + a^2)/(Br - 1).$$

12. $K_3 + aP_2,\ P_1,\ a > 0$. $\quad \tau\exp(x^2/a) + z(\theta) = 0$, $\quad z''z^2(\theta a^{-2} - 1) + (\theta z' - z)z'(2z' - za^{-2}) = 0$,

$$z = B(1 - 2\lambda)^{1/2}(1 + 2\lambda)^{-1/2}\theta^{1/2}\varphi(\lambda), \ z = B\theta, \quad \lambda^2 = (\theta - a^2)/(A\theta - 4a^2),$$

$$\varphi(\lambda) = \left\{\begin{array}{ll} (1 + \sqrt{A}\lambda)^{1/\sqrt{A}}(1 - \sqrt{A}\lambda)^{-1/\sqrt{A}}, & A > 0 \\ \exp((2/\sqrt{-A})\, arctg(\sqrt{-A}\lambda)), & A < 0. \end{array}\right\}$$

13. $L_2 + K_1 + P_0 + P_3,\ P_0 - P_3$. $\quad \tau^2 + 4x^1 = z(x^2)$, $\quad z'' = 0$, $\quad z = Ax^2 + B$.

14. $L_2 + K_1 + \varepsilon P_2,\ P_0 - P_3,\ \varepsilon = \pm 1$. $\quad \tau x^2 + \varepsilon x^1 + z(\tau) = 0$.

15. $L_2 + K_1 + P_0 + P_3,\ P_2$. $\tau x^1 + \varepsilon x^0 - u + \tau^3/6 + z(\rho) = 0$, $\quad 2z''\rho - z' = 0$, $\quad \rho = \tau^2 + 4x^1$, $\quad z = A\rho^{3/2} + B$.

16. $K_3,\ L_2{+}K_1.\ \ \theta+{x_1}^2=z(x^2),\quad z''z-3z'^2/2-4z=0,\ \pm 2x^2+A=\int z^{-1/2}(Bz^2-1)^{-1/2}dz.$

17. $\cos c\, L_3{+}\sin c\, K_3,\ P_0{-}P_3,\ \ 0<c<\pi,\ c\neq\pi/2.\ \ u=-x^0+\exp\{-tg\,c\ arctg(x^1/x^2)\}z(r),$

$$z''z^2+2z'^3r(tg\,c)^{-2}-z'^2z+3z'z^2/(2r)=0,\ z=A\exp\{\pm tg\,c\ arctg(Br-1)^{1/2}\}.$$

18. $K_3{+}aP_2,\ L_2{+}K_1,\ \ a>0.\ \theta+{x_1}^2=z(\rho),\ \rho=x^2+a\ln\tau,\ \ z''(z-a^2)+5az'-3z'^2/2-4z=0,$ 19. $K_3{+}aP_2,\ P_0{-}P_3,\ \ a>0.\ \ u=-x^0+\exp\{-x^2/a\}z(x^1),\ z''z^2-z'^2z=0,\ z=B\exp\{Ax^1\}.$

20. $L_1, L_2, L_3.\ u^2+{x_1}^2+{x_2}^2=z(x^0),\ \ zz''-3z'^2/2-2z=0,\ \pm 2x^0+A=\int z^{3/2}(Bz^4-1)^{-1/2}dz.$

Инвариантное H – решение п.6 может быть получено с двумя неподобными группами $H\subset P$ (1, 3). Решения п.п. 6, 14 включают произвольные функции одного аргумента; обзор, посвященный функционально-инвариантным решениям дифференциальных уравнений, содержится в [22]. Решения п.п. 16, 20 выражены в квадратурах.

Выводы

Таким образом, построеная система частных решений для уравнения релятивистских мембран – оптимальная система инвариантных Н-решений ранга 1. Все указанные решения этого уравнения можно получить из такой системы с помощью конечных преобразований его симметрии – группы Пуанкаре P(1, 3) движений пространства независимых и зависимой переменных.

Библиографические ссылки

1. **Bordag M.** On the type of the temperature phase transition in φ^4 model / M. Bordag, V. Demchik, A. Gulov, V. Skalozub // arXiv:1012.5383v1 [hep-lat] 24 Dec 2010
2. **Matysina Z. A.,** The solubility of substitutional impurities in metals and alloys / Z. A. Matysina, D. V. Schur, S. N. Antropov, S. Yu. Zaginaichenko // J. Metallofiz. i Noveishie Tekhnol., – 2007. – V. 29, № 7. – P. 909 – 936.
3. **Блохинцев Д. И.** Существенно-нелинейные поля и поляризация вакуума/ Д. И. Блохинцев //Teoret. Mat. Fiz., 1974, V 21, N 2, – P. 155–159
4. **Barbashov B. M**. Solution and quantization of a nonlinear two-dimensional model for a Born-Infeld type field, / B. M. Barbashov, N. A. Chernikov //Sov. Phys. JETP, – 1966. –T. 23, C. 861 – 868.
5. **Scherk J.** An introduction to the theory of dual models and strings/ J. Scherk // Review of Modern Physics. 1975, – V. 47, N1, P. 123 – 164.
6. **Chernikov N. A.** Example of relativistic two-body problem. I. Boundary-value problem for minimal surface / N. A. Chernikov, N. S. Shavokhina // Teoret. Mat. Fiz., 1980, V 42, N 1, P. 59 – 70.
7. **Collins F.A.,** Tucker R.W. Classical and quantum mechanics of free relativistic membranes. / F. A. Collins, R. W. Tucker //Nucl. Phys., 1976, V. B112, P. 150 – 176.
8. **Aref'eva I.Ya.** Gauge theory and Bags / I.Ya. Aref'eva // Phys. Lett.,1980, V. B95, № 2, P. 269 – 272.
9. **Polchinski J.** String theory. Cambridge Univ. / J. Polchinski //Press, 1998, V. 1: 402 p., V. 2: 531 p.
10. **Schwarz J.** The second superstring revolution / J. Schwarz // Preprint hep-th/9607067. 1996. - P. 1 – 8.
11. **Kaku M.** Introduction to superstrings and M-theory./ M. Kaku –New York: Springer-Verlag

Inc., 1999, – 585 p.

12. **Hong Liu.** Wiedemann An AdS/CFT calculation of screening in a hot wind/ Liu Hong, Rajagopal Krishna, and Achim Urs // arXiv:hep-ph/0607062v3 11 Dec 2006.
13. Nurmagambetov A. J. Quantum-consistent superstring models in four dimensional space-time / A. J. Nurmagambetov // ВАНТ.–2009.– №5.– С. 3 – 11.
14. **Hoppe J.** Some Classical Solutions of Relativistic Membrane Equations in 4 Space-Time Dimensions/ J. Hoppe // Phys. Lett. B 329 (1994), no. 1, 10-14 arXiv:hep-th/9402112v1 18 Feb 1994
15. **Bordemann M.** The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2- dimensional Fluid Dynamics / M. Bordemann, J. Hoppe //Phys Lett , –1993. – B 317. – P. 315
16. **Barbashov B. M.** Introduction to the relativistic string theory / B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko // Imprint: Teaneck, NJ, World Scientific Publishing Co. Inc., 1990.- 264pp Pub. date: Jun 1990
17. **Zheltukhin A. A.** Exactly solvable p-brane model with extra supersymmetry / A. A. Zheltukhin, D. V. Uvarov // Phys. Lett. – 2002. – V. 545, B N 1-2. – P. 183 – 189.
18. **Ovsiannikov L. V.** Group analysis of differential equations// NewYork, / L. V. Ovsiannikov AcademicPress, – 1982. – Ch.5. – 400 p.
19. **Danilov Yu.A.** On the Symmetry of Classical and Wave Equations/ Yu. A. Danilov, G. I. Kuznetsov, Ya. A. Smorodinsky // Sov. J. Nucl. Phys. 1980. – V.32, P. 801.
20. **Antropov S. N.** Symmetry groups of scalar relativistic fields with self-interaction// S. N. Antropov, S. A. Vladimirov /Teoret. Mat. Fiz., 1978, Volume 35, Number 1, P. 56 – 67.
21. **Patera J.** Subgroups of the Poincare group and their invariants./ Patera J.et AL. //J. Math. Phys., 1976, V. 17, № 6, P. 977 – 985
22. **Еругин Н. П.** Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений./ Н. П. Еругин, М. М. Смирнов // Дифференц. уравнения, 1981, Т. 17, № 5, С. 863 – 865.

Надійшла до редколегії 08.07.2011