

УДК 538.3:620.179

В. О. Пащенко

Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара

ФУНКЦІЇ ГРІНА ЗМІШАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НЕМОНОХРОМАТИЧНОГО ЗОНДУВАННЯ ОРТОТРОПНОГО КОМПОЗИТУ З ПОКРИТТЯМ

Електромагнітне зондування штучних і природних середовищ залучається для встановлення значень фізичних параметрів локалізації структурних неоднорідностей із оцінюванням їхніх геометричних розмірів. Щоб забезпечити високу точність результатів зондування та можливість якісного аналізу чинників, потрібно мати аналітичну модель розподілення зондувального електромагнітного поля. Для її створення найчастіше використовують методи інтегральних рівнянь, складених, зокрема, відносно струмів поляризації, поверхневих струмів чи потенціалів. Методи теорії потенціалу, котрі зводять граничні задачі для рівнянь із частковими похідними відносно гладких дійсно-значних функцій багатьох змінних до інтегральних рівнянь нижчої вимірності, особливо ефективні у випадку зовнішніх задач для необмежених областей.

Методом поверхневих потенціалів знайдені наближення функцій Гріна для змішаних лінійних граничних задач підповерхневого немонохроматичного зондування ортотропно-провідного композиту з гомогенним діелектричним покриттям. Отримані наближення просторово-часових розподілень абсциси та ординати вектор-потенціалу подаються у вигляді: потенціалів одинарного шару – в разі зовнішніх і внутрішніх граничних задач Неймана для хвильових рівнянь у повітряному напівпросторі та діелектричному покритті; потенціалів подвійного (дипольного) шару – у випадку зовнішньої граничної задачі Дирихле для рівняння електропровідності в ортотропно-провідному композиті.

Ключові слова: немонохроматичне зондування, шаруваті середовища, поверхневі потенціали, змішані граничні задачі, функції Гріна, ортотропні провідні композити.

Электромагнитное зондирование искусственных и естественных сред используется для установления значений физических параметров, локализации структурных неоднородностей с оценением их геометрических размеров. Чтобы обеспечить высокую точность результатов зондирования и возможность качественного анализа факторов, необходимо иметь аналитическую модель распределения зондирующего электромагнитного поля. Для ее создания, чаще всего, применяют методы интегральных уравнений, составленных, в частности, относительно токов поляризации, поверхностных токов или потенциалов. Методы теории потенциала, которые сводят граничные задачи для уравнений с частными производными относительно гладких действительных функций многих переменных к интегральным уравнениям меньшей размерности, особенно эффективны в случае внешних задач для неограниченных областей.

Методом поверхностных потенциалов найдены приближения функций Грина для смешанных линейных граничных задач подповерхневого немонохроматического зондирования ортотропного проводящего композита с гомогенным диелектрическим покрытием. Полученные приближения пространственно-временных распределений абсциссы и ординаты вектор-потенциала представляются в виде: потенциала одинарного слоя – в случае внешних и внутренних граничных задач Неймана для волновых уравнений в воздушном полупространстве и диелектрическом покрытии; потенциала двойного (дипольного) слоя – в случае внешней граничной задачи Дирихле для уравнения электропроводности в ортотропном проводящем композите.

Ключевые слова: немонохроматическое зондирование, слоистые среды, поверхностные потенциалы, смешанные граничные задачи, функции Грина, ортотропно-проводящие композиты.

The electromagnetic sounding of the natural and artificial mediums uses to the values determination of physical parameters and the localization of structure inhomogeneity's with the estimation of their geometrical sizes. To reach the high precision of sounding results and the possibility of parameters qualitative analyze it is necessary to have the analytical model of sounding field distribution. For its creation there are used often the integral equations that are write about the polarization currents, the surface currents or potentials. The potential theory that reduces the boundary problems for the equations with partial derivatives about smoothed real-valued function of some variables to the integral equations of lesser dimension is very effective in the case of external problems in no restricted domains. Green's functions give the effective solution manner of linear boundary problems for differential equations of second order with partial derivatives that are generated by Maxwell's equations. In result the general solution of boundary problem is presented by the integral expression (by the bundle) with Green's function as the core that takes into account the initial and boundary conditions or the distribution of field external sources.

In this paper by the potentials method Green's functions approximations of the mixed linear boundary problems for the subsurface electromagnetic sounding of the orthotropic conducting composite with the homogeneous dielectric cost have established. Received space-time distributions of vector-potential abscissa and ordinate are given by: potential of ordinary layer in the case of external and inner Newman's problems for the wave equation in the air subspace and the dialectical coat; potential of double (dipole) layer in the case of external problems Direxle for electro conductivity equation in orthotropic composite.

Key words: non-monochromatic sounding, layering medium, surface potential method, mixed boundary problems Green's function, orthotropic conducting composite.

Вступ

Відповідальність деталей і виробів машинобудування із вуглецевих, евтектичних і металевих композитів [1 – 3] обумовлює систематичне проведення неруйнівного контролю. У процесі зберігання та експлуатації найефективнішим є електромагнітний контроль, який поєднує такі переваги як необтяжливість, локальність, оперативність і вседоступність.

Армовані композити – анізотропні в фізичному, технологічному й конструктивному аспектах, однак володіють симетрією структури відносно напрямку армування, розглядаючись як ортотропні [1; 2].

Гомогенні діелектрики із питомою електропровідністю $10^{-14} \div 10^{-16}$ См/м широко використовуються як захистові покриття, зокрема, з тепло- й електроізоляційного пінополіуретану ПУ-101 (діелектрична проникність $\epsilon = 1,1 \div 1,2$) і тепло- й гідроізоляційних піноепоксидів УП-4-258М-0,3 та УП-4-258М-0,4 ($\epsilon = 1,5$) [3].

Електромагнітне зондування штучних і природних середовищ залучається для встановлення значень фізичних параметрів [4 – 6], локалізації структурних неоднорідностей із оцінюванням їхніх геометричних розмірів [7; 8]. Щоб забезпечити точність результатів зондування та можливість якісного аналізу чинників, потрібно мати аналітичну модель розподілення зондувального електромагнітного поля. Для її створення використовують методи інтегральних рівнянь, складених, зокрема, відносно струмів поляризації [9], поверхневих струмів [9] чи потенціалів [10]. Так, в [11] при розв'язуванні двовимірної задачі дифракції монохроматичних хвиль на проникному циліндрі в плоскошаруватому середовищі залучено метод поверхневих потенціалів [12 – 14].

Теорія потенціалу зводить крайові задачі для рівнянь із частковими похідними до інтегральних рівнянь нижчої вимірності й особливо ефективна у випадку зовнішніх задач для необмежених областей. Так, 3-вимірні крайові задачі теорії дифракції зводяться до інтегральних рівнянь на поверхні області, коли розв'язок подається поверхневим потенціалом із певною густиною, а умови випромінювання на нескінченості задовольняються безпосередньо [10].

Функції Гріна забезпечують точний метод розв'язання лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь із частковими похідними другого порядку, до яких зводиться система рівнянь Максвела. У результаті загальний розв'язок подається згортокою, ядром якої є функція Гріна, котра безпосередньо враховує граничні умови та (або) розподілення сторонніх джерел поля [9, 10].

Удосконалення методології, розширення функціональних можливостей, підвищення точності та інформативності підповерхневого зондування досягаються ускладненням форми сторонніх збуджень, розширенням їхнього частотного діапазону; серед немонохроматичних впливів особливе місце займає дельта-функція. Тому мета дослідження полягає в знаходженні, методом поверхневих потенціалів, функцій Гріна змішаних лінійних крайових задач немонохроматичного зондування ортотропно-провідного композиту з плоскою горизонтальною поверхнею:

- a) як й у гомогенного діелектричного покриття;
- b) у разі відсутності захистового покриття.

Математична проблема зондування

Початок декартової системи координат розміщено в геометричному центрі горизонтальної антенної системи, котра зазором h віддалена від плоскої горизонтальної поверхні гомогенного діелектрика товщиною d із дійснозначною проникністю ϵ . У його глибину, перпендикулярно поверхні, націлена вісь аплікату Z , а вісі абсцис X й ординат Y направлені в повітрі, відповідно, поперек і вздовж напрямку армування ортотропного композиту (рис.1).

Розміщення горизонтальної антенної системи в межах координатної площини XOY зумовлює рівність нулю проекції на вісь Z вектора густини стороннього струму

$$j_z^{fr} = 0, \quad (1)$$

а його проекції на вісі X і Y у точці $(x_0, y_0, 0)$ випромінювача антенної системи задаються так:

$$j_*^{fr} = J\langle t \rangle F_*\langle x_0, y_0 \rangle \delta\langle x - x_0 \rangle \delta\langle y - y_0 \rangle \delta\langle z \rangle, \quad (*=x, y) \quad (2)$$

де δ -функція визначається наступним чином:

$$\delta\langle z - h \rangle = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{\sqrt{\pi}} \exp\langle -v^2(z - h)^2 \rangle \quad \left(\int_{-\infty}^h \delta\langle z - h \rangle dz = \int_h^{-\infty} \delta\langle z - h \rangle dz = \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

$J\langle t \rangle$ – змінення в часі густини стороннього струму, а

$$F_x\langle x_0, y_0 \rangle = \cos \gamma\langle x_0, y_0 \rangle, \quad F_y\langle x_0, y_0 \rangle = \sin \gamma\langle x_0, y_0 \rangle,$$

причому

$$\gamma = \arctg \left. \frac{dL\langle x \rangle}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (5)$$

– це кут між додатним напрямком осі X та дотичною до контуру $y = L\langle x \rangle$ антени в точці $(x_0, y_0, z_0 = 0)$.

Рівність (1), а також горизонтальність плоских міжшарових границь обумовлюють тотожність нулю аплікату A_z векторного потенціалу в досліджуваному середовищі.

У ортотропному композиті, де малі струми поляризації та не враховується дисипація енергії вихорових струмів унаслідок низької потужності поля, зондування описують однорідні рівняння електропровідності [15]

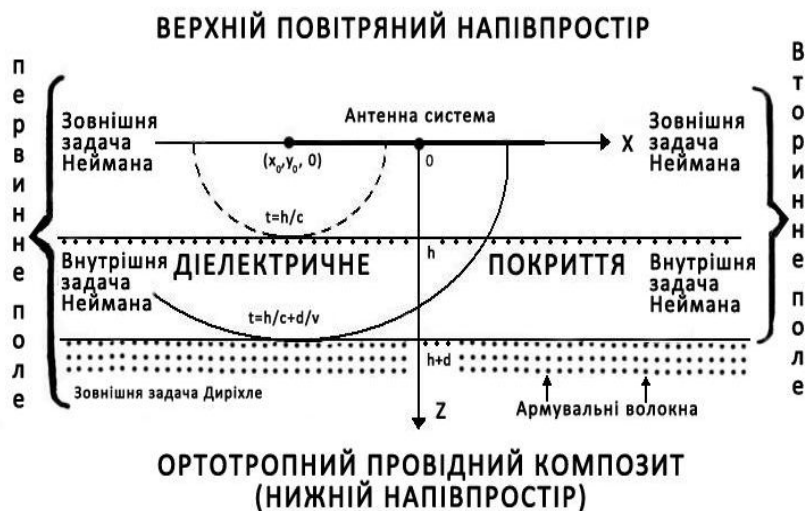


Рис. 1. Локалізація змішаних лінійних крайових задач підповерхневого немонохроматичного зондування

$$\frac{\partial^2 A_*^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_*^L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_*^L}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma_* \frac{\partial A_*^L}{\partial t} \quad (6)$$

відносно абсциси та ординати A_*^L ($*$ = x, y) вектор-потенціалу (із надрядковим індексом L ; low – нижній напівпростір), де μ_0 – магнітна проникність повітря, σ_* – значення питомої електропровідності вздовж $*$ – координати.

У гомогенному діелектричному покритті відсутні як струми провідності, так і джерела сторонніх струмів, тому мають місце однорідні хвильові рівняння [15]:

$$\frac{\partial^2 A_*^D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_*^D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_*^D}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 A_*^D}{\partial t^2}, \quad (*=x, y) \quad (7)$$

де A_*^D – декартові компоненти вектор-потенціалу, а ϵ та ϵ_0 – відносна та абсолютна проникності, відповідно; надрядковий індекс D вказує на діелектрик (dielectric).

У повітрі над захистовим покриттям відсутні струми провідності, але в точці $(x_0, y_0, z_0 = 0)$ випромінювача антени протікає сторонній струм, тому справедливі неоднорідні хвильові рівняння [15]

$$\frac{\partial^2 A_*^U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_*^U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_*^U}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A_*^U}{\partial t^2} + \mu_0 j_*^{fr}, \quad (*=x, y) \quad (8)$$

де A_*^U – $*$ – компонента вектор-потенціалу у верхньому (upper) напівпросторі, а j_*^{fr} – $*$ – складова густини стороннього немонохроматичного струму.

Щоб описати процес зондування, необхідно окрім параболічних (6) та гіперболічних (7,8) рівнянь мати і вихідне розподілення компонент вектор-потенціалу (початкові умови) та їхні характеристики в нескінченності й на плоских горизонтальних границях діелектрика з повітрям й ортотропним композитом (граничні умови). Відповідні змішані лінійні крайові задачі, котрі розглядаються в межах зон поширення первинного та вторинного електромагнітних полів, являються внутріш-

німи в діелектрику, й зовнішніми в нескінченних областях верхнього та нижнього напівпросторів.

Функції Гріна первинного поля

У повітряному напівпросторі циліндричними хвилями, нормально до плоскої горизонтальної поверхні діелектричного покриття, поширюється зондувальне поле, створене випромінювачами горизонтально орієнтованої антенної системи. Похідні абсциси й ординати векторного потенціалу – в напрямку розповсюдження поля – прямо пропорційні заданій густині стороннього струму (гранична умова Неймана). Такі проекції задовольняють хвильовому рівнянню (8) й умовам випромінювання в нескінченності, а тому для первинного поля у верхньому напівпросторі має місце зовнішня задача Неймана (рис.1).

У разі миттєвого стороннього струму $J_0\delta\langle t \rangle$ в точці $(x_0, y_0, z_0 = 0)$ випромінювача створене поле поширюється поодинокую сферичною хвилею, причому абсциса й ордината функції Гріна в довільній точці $(x, y, z > h)$ повітряного напівпростору задаються таким виразом

$$G_{1*}^U\langle x, y, z, t \rangle = \mu_0 J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L\langle r_1 \rangle \cdot \delta\langle t - r_1 / c \rangle, \quad (9)$$

де $L\langle r \rangle = (4\pi r)^{-1}$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа [16], присутнього в лівій частині рівнянь (6), (7), (8), причому

$$r_1 = r_1\langle x - x_0, y - y_0, z \rangle = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \quad (10)$$

– віддаленість від точкового джерела первинного поля.

У момент часу $t=h/c$, де $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ – швидкість розповсюдження електромагнітної взаємодії в повітрі, поодинока сферична хвиля первинного поля (пунктир на рис.1) торкається плоскої горизонтальної поверхні діелектричного покриття в точці (x_0, y_0, h) . У подальшому просторово-часове розподілення вектор-потенціалу на поверхні покриття володіє компонентами:

$$A_{1*}^U\langle x, y, h, t \rangle = \mu_0 J_0 F_* \cdot L\langle x - x_0, y - y_0, h \rangle \cdot \delta\langle t - c^{-1}r_1\langle x - x_0, y - y_0, h \rangle \rangle, \quad (11)$$

де віддаленість r_1 від миттєвого елементарного джерела збудження визначається (10) при $z=h$; розподілення подається розширюваним колом із поточним радіусом

$$R_{1D}\langle t \rangle = \sqrt{c^2t^2 - h^2} \quad (12)$$

відносно фіксованого центра (x_0, y_0, h) .

Реалізоване в часі підповерхневе зондування просторово розподілене вздовж осі аплікату, оскільки електромагнітне поле поширюється нормально щодо плоских горизонтальних поверхонь композиту та діелектричного покриття. Тому, з метою спрощення математичної моделі, залучаємо часові похідні абсциси й ординати векторного потенціалу замість їхніх нормальних похідних, використовуваних методами теорії потенціалу. Наприклад, часова похідна компонент функції Гріна (9) при $z=h$, задаючи струм поляризації на поверхні захистового покриття, являє собою граничну умову внутрішньої крайової задачі Неймана щодо поширення в діелектрику первинного поля.

Загальні розв'язки такої крайової задачі відносно абсциси й ординати вектор-

потенціалу подаються виразом [18], тотожним так званому потенціалу одинарного шару [10, 16] для хвильового рівняння (7):

$$A_*^D \langle x, y, z, t \rangle = \frac{2}{v} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \cdot L \langle x - \xi, y - \eta, z - h \rangle \cdot \varphi_*^D \langle \xi, \eta, h, t \rangle \quad (13)$$

(* = x, y; $z \geq h, t \geq h/c$)

де $v = (\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon)^{1/2}$ – швидкість розповсюдження електромагнітного поля в діелектрику з дійснозначною проникністю ε , а $\varphi_*^D \langle \xi, \eta, h, t \rangle$ – * – компонента густини струму поляризації, котра прямо пропорційна часовій згортці однойменної проекції похідної за часом граничного розподілення векторного потенціалу $A_{1*}^U \langle x, y, h, t \rangle$ та перехідної характеристики $H_1^D \langle t \rangle$ поверхні захистового покриття для первинного поля

$$\varphi_*^D \langle \xi, \eta, h, t \rangle \sim \int_{h/c}^t d\tau \frac{\partial A_{1*}^U \langle x, y, h, \tau \rangle}{\partial \tau} H_1^D \langle t - \tau \rangle. \quad (14)$$

У разі дельта-збудження граничне розподілення $A_{1*}^U \langle x, y, h, t \rangle$ задається виразом (11); підставляючи його до (14) маємо співвідношення для проекцій густини потенціалу одинарного шару

$$\varphi_*^D \langle \xi, \eta, h, t \rangle \sim \mu_0 J_0 F_* \cdot L \langle x - x_0, y - y_0, h \rangle \frac{\partial H_1^D \langle t - c^{-1} r_1 \langle x - x_0, y - y_0, h \rangle \rangle}{\partial t}. \quad (15)$$

Після підстановки (15) у (13) маємо компоненти функції Гріна внутрішньої задачі Неймана щодо поширення первинного поля в діелектричному покритті:

$$G_*^D \langle x, y, z, t \rangle \sim \frac{2J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle}{v} \iint_{(\xi^2 - x_0)^2 + (\eta^2 - y_0)^2 \leq R_{1D}^2 \langle t \rangle} d\xi d\eta \cdot L \langle x - \xi, y - \eta, z - h \rangle \times$$

$$\times L \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \frac{\partial H_1^D \langle t - c^{-1} r_1 \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \rangle}{\partial t},$$

(* = x, y; $h \leq z \leq h + d, t \geq h/c$)

котрі визначають просторово-часові розподілення абсциси й ординати вектор-потенціалу при дельта-збудженні точки $(x_0, y_0, 0)$ верхнього напівпростору; $R_{1D} \langle t \rangle$ – поточний радіус (12) розширюваного кола розподілення первинного поля на поверхні покриття.

У момент часу $t = h/c + d/v$ поодинокі хвиля первинного поля (суцільна лінія на рис. 1) – центром своєї еліпсоїдальної ділянки в діелектричному покритті – торкається плоскої горизонтальної поверхні композиту в точці $(x_0, y_0, h + d)$. Після цього на поверхні останнього виникає просторово-часове розподілення вектор-потенціалу з компонентами:

$$A_*^D \langle x, y, h + d, t \rangle \sim \frac{2J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle}{v} \iint_{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 \leq R_{1D}^2 \langle t \rangle} d\xi d\eta \cdot L \langle x - \xi, y - \eta, d \rangle \times \quad (17)$$

$$\times L\langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \frac{\partial H_1^D \langle t - c^{-1} r_1 \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \rangle}{\partial t},$$

котре подається розширюваним диском із поточним радіусом

$$R_{1L} \langle t \rangle = R_{1D} \langle t^U \rangle + \sqrt{v^2 (t - t^U)^2 - d^2}$$

відносно фіксованого центра $(x_0, y_0, h + d)$, де t_1^U – зростаюча тривалість досягнення поверхні діелектричного покриття граничними елементами бокових сферичних ділянок – у повітрі – поодинокій хвилі первинного поля. Виразом (17) задається гранична умова зовнішньої крайової задачі Діріхле щодо поширення первинного поля в композиті у разі дельта-збудження точки $(x_0, y_0, 0)$ повітряного напівпростору.

Загальні розв’язки цієї крайової задачі відносно абсциси й ординати векторного потенціалу подаються [18] так званим потенціалом подвійного (дипольного) шару [17] для рівняння електропровідності(6):

$$A_*^L \langle x, y, h + d, t \rangle = \int_{h/c+d/v}^t \frac{d\mathcal{G}}{2} \iint_{(\zeta-x_0)^2+(\zeta-y_0)^2 \leq R_{1L}^2 \langle t \rangle} d\zeta d\zeta \cdot \psi_*^L \langle \zeta, \zeta, h + d, \mathcal{G} \rangle \times \\ \times \frac{d}{dz} \left\{ - \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \sigma_*}{\pi(t-\mathcal{G})} \right)^3} \exp \left\langle - \frac{\mu_0 \sigma_*}{4(t-\mathcal{G})} [(x-\zeta)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-h-d)^2] \right\rangle \right\}, \quad (18)$$

$$(*=x, y; z \geq h + d, t \geq h/c + d/v),$$

де σ_* – питома електропровідність уздовж * – координати, а $\psi_*^L \langle \zeta, \zeta, h + d, \mathcal{G} \rangle$ – * – компонента густини зазначеного потенціалу; вона прямо пропорційна часовій згортці однойменних проєкцій як граничного розподілення $A_*^L \langle x, y, h + d, t \rangle$, так і перехідної характеристики $H_{1*}^L \langle t \rangle$ поверхні композита для первинного поля:

$$\psi_*^L \langle \zeta, \zeta, h + d, \mathcal{G} \rangle = \int_{h/c+d/v}^t d\tau A_*^D \langle \zeta, \zeta, h + d, \tau \rangle H_{1*}^L \langle \mathcal{G} - \tau \rangle. \quad (*=x, y) \quad (19)$$

У разі дельта-збудження граничне розподілення $A_*^D \langle x, y, h + d, t \rangle$ задається виразом(17); підставляючи його до (19) маємо співвідношення для густини потенціалу дипольного шару:

$$\psi_*^L \langle \zeta, \zeta, h + d, \mathcal{G} \rangle \sim \frac{2J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle}{v} \iint_{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2 \leq R_{1D}^2 \langle t \rangle} d\xi d\eta \cdot L \langle \zeta - \xi, \zeta - \eta, d \rangle \times \\ \times L \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \int_{h/c+d/v}^t d\tau \cdot H_{1*}^L \langle v - \tau \rangle \frac{\partial H_1^D \langle t - c^{-1} r_1 \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \rangle}{\partial t}. \quad (20)$$

Після підстановки (20) в (18) отримуємо функції Гріна зовнішньої крайової задачі Діріхле щодо розповсюдження первинного поля в ортотропному композиті:

$$\begin{aligned}
G_*^L \langle x, y, z, t \rangle &\sim \frac{2J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle}{v} \int_{h/c+d/v}^t \frac{d\mathcal{G}}{2} \iint_{(\zeta-x_0)^2 + (\zeta-y_0)^2 \leq R_{iL}^2(t)} d\zeta d\zeta \times \\
&\times \frac{d}{dz} \left\{ -\sqrt{\left(\frac{\mu_0 \sigma_*}{\pi(t-\mathcal{G})}\right)^3} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_*}{4(t-\mathcal{G})} [(x-\zeta)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-h-d)^2]\right) \right\} \times \\
&\times \iint_{(\xi-x_0)^2 + (\eta-y_0)^2 \leq R_{iD}^2(t)} d\xi d\eta \cdot L \langle \zeta - \xi, \zeta - \eta, d \rangle \cdot L \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \times \\
&\times \int_{h/c}^t d\tau \cdot H_{1*}^L \langle v - \tau \rangle \frac{\partial H_1^D \langle t - c^{-1} r_1 \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \rangle}{\partial t},
\end{aligned}$$

котрі, задовольняючи умови випромінювання в нескінченності, задають просторо-часові розподілення абсциси й ординати векторного потенціалу при дельта-збудженні точки $(x_0, y_0, 0)$ повітряного напівпростору.

Функції Гріна вторинного поля визначають у повітряному напівпросторі та діелектричному покритті просторо-часові розподілення векторного потенціалу, створювані дельта-збудженнями фіктивних джерел.

У повітряному напівпросторі вторинне поле виникає внаслідок миттєвого збудження фіктивним стороннім джерелом у точці $(x_0, y_0, 2h)$, симетричній фактичному точковому джерелу відносно плоскій горизонтальній поверхні діелектричного покриття. На цій границі створюється, із мінімальною затримкою $\tau = h/c$ досягнення первинним полем, поверхневе просторо-часове розподілення струму поляризації, котре задається часовою похідною вектор-потенціалу. Таке розподілення являє собою граничну умову Неймана для хвильового рівняння (8), складеного відносно декартових компонент вектор-потенціалу; при цьому має місце зовнішня крайова задача Неймана щодо розповсюдження вторинного поля у повітряному напівпросторі. Абсциса й ордината його функції Гріна задаються [18] потенціалом одинарного шару [10, 16] для хвильового рівняння (8):

$$\begin{aligned}
G_{2*}^U \langle x, y, z, t \rangle &= -\mu_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L \langle r_2 \rangle \int_{r_2/c}^t H_2^D \langle \tau - r_2/c \rangle dJ \langle t - \tau \rangle = \\
&= -\mu_0 J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L \langle r_2 \rangle \frac{dH_2^D \langle t - r_2/c \rangle}{dt},
\end{aligned}$$

де $r_2 = r_2 \langle x - x_0, y - y_0, 2h - z \rangle = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (2h - z)^2} \geq h$ – віддаленість від фіктивного джерела дельта-збудження, а поверхнева густина струму поляризації подається часовою згорткою як диференціала елементарного збудження $J \langle t \rangle = J_0 \delta \langle t \rangle$, так і перехідної характеристики $H_2^D \langle t \rangle$ поверхні діелектричного покриття для вторинного поля.

У діелектричному покритті вторинне поле створюється дельта-збудженням фіктивного стороннього джерела в точці $(x_0, y_0, 2(h+d))$, симетричній фактичному точковому джерелу відносно плоскій горизонтальній поверхні ортотропно-провідного композиту. На зазначеній поверхні створюється, із мінімальною затримкою $\tau = h/c + d/v$ досягнення первинним полем, поверхневе просторо-часове

розподілення вихрових струмів, котре визначається часовою похідною вектор-потенціалу. Таке розподілення є граничною умовою Неймана для хвильового рівняння (7), записаного відносно декартових компонент вектор-потенціалу; при цьому має місце внутрішня крайова задача Неймана щодо поширення вторинного поля в діелектричному покритті. Абсциса й ордината функції Гріна задаються [18] потенціалом одинарного шару [10, 16] для хвильового рівняння (7):

$$G_{2*}^D \langle x, y, z, t \rangle = -\mu_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L \langle r_2 \rangle \int_{r_2/v}^t H_2^L \langle \tau - r_2 / v \rangle dJ \langle t - \tau \rangle =$$

$$= -\mu_0 J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L \langle r_2 \rangle \frac{dH_2^L \langle t - r_2 / v \rangle}{dt},$$

де $r_2 = r_2 \langle x - x_0, y - y_0, 2(h + d) - z \rangle = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (2(h + d) - z)^2}$ – віддаленість від другого фіктивного джерела дельта-збудження.

Поверхнева густина вихрових струмів подається часовою згорткою як диференціала елементарного збудження $J = J_0 \delta \langle t \rangle$, так і перехідної характеристики $H_2^L \langle t \rangle$ поверхні діелектричного покриття для вторинного поля.

Приклад

Здійснимо дельта-збудження армованого металевими волокнами композиту з плоскою горизонтальною поверхнею, не захищеною діелектричним покриттям. Тоді її перехідні характеристики для первинного й вторинного полів задаються симетричною ступеневою одиничною функцією та її інверсією:

$$H_1^L \langle t \rangle = \begin{cases} 1, & \text{їдє } t > 0 \\ 1/2, & \text{їєїї } t = 0, \\ 0, & \text{їдє } t < 0 \end{cases} \quad H_2^L \langle t \rangle = -H_1^L \langle t \rangle.$$

Створення аналітичної моделі підповерхневого електромагнітного зондування засноване на розв'язуванні трьох зовнішніх крайових задач, функції Гріна котрих мають такі проєкції.

• У повітряному напівпросторі задаються виразом (9) у разі первинного поля, а для вторинного – подібним співвідношенням

$$G_{2*}^U \langle x, y, z, t \rangle = -\mu_0 J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle \cdot L \langle r_2 \rangle \delta \langle t - r_2 / c \rangle;$$

подібність спричинена нехтуванням дисипацією енергії вихрових струмів внаслідок низької потужності зондувального поля.

• У нижньому напівпросторі (композиті) отримуються шляхом:

а) підстановки (11) до (19):

$$\psi_*^L \langle \zeta, \eta, h, \tau \rangle = \mu_0 J_0 F_* \cdot L \langle \zeta - x_0, \eta - y_0, h \rangle \cdot H_1^L \langle \tau - c^{-1} r_1 \langle \zeta - x_0, \eta - y_0, h \rangle \rangle;$$

б) із подальшою підстановкою до (18):

$$G_*^L(x, y, z, t) \sim \frac{\mu_0 J_0 F_* \langle x_0, y_0 \rangle}{2} \iint_{(\xi-x_0)^2 + (\eta-y_0)^2 \leq R^2} d\xi d\eta \cdot L \langle \xi - x_0, \eta - y_0, h \rangle \times \\ \times \int_{c^{-1}r_1 \langle \xi-x_0, \eta-y_0, h \rangle}^t d\tau \frac{d}{dz} \left\{ - \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \sigma_*}{\pi(t-\tau)} \right)^3} \exp \left\{ - \frac{\mu_0 \sigma_*}{4(t-\tau)} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-h)^2] \right\} \right\},$$

де $R \langle t \rangle$ – поточний радіус (12) розширюваного диска, в точках котрого первинне поле досягло поверхні композиту до даного моменту часу.

Висновки

Створення аналітичної моделі немонохроматичного зондування ортотропно-провідного композиту з діелектричним покриттям ґрунтоване на розв’язанні п’яти змішаних лінійних крайових задач: зовнішньої й внутрішньої Неймана та зовнішньої Діріхле – для первинного поля, а також зовнішньої й внутрішньої Неймана – для вторинного поля.

Отримані просторово-часові розподілення абсциси та ординати вектор-потенціалу подаються у вигляді потенціалів:

одинарного шару – у разі зовнішніх й внутрішніх задач Неймана для хвильових рівнянь у повітряному напівпросторі та діелектричному покритті;

подвійного (дипольного) шару – у випадку зовнішньої крайової задачі Діріхле для рівняння електропровідності в ортотропно-провідному композиті.

Поверхневі густини зазначених потенціалів являють собою часові згортки однойменних проєкцій як граничного розподілення: вектор-потенціалу (для задачі Діріхле) або струмів (для задач Неймана), так і перехідної характеристики горизонтальної поверхні для первинного чи вторинного поля.

Для кожної з крайових задач отримано аналітичний вираз для абсциси й ординати відповідної функції Гріна.

Результати ілюстровані прикладом дельта-збудження армованого металевими волокнами композиту із плоскою горизонтальною поверхнею, не захищеною діелектричним покриттям.

Бібліографічні посилання

1. Композиционные материалы: Справочник / под ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М., 1990. – 512 с.
2. Композиционные материалы: Справочник / под ред. Д. М. Карпиноса. – К., 1985. – 592 с.
3. Полімерні композиційні матеріали в ракетно-космічній техніці: підручник / Є. О. Джур, Л. Д. Кучма, Т. А. Манько та ін. – К., 2003. – 400 с.
4. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. – М., 1973. – 344 с.
5. **Барелл Дж. А.** Распространение низкочастотных видеоимпульсов в средах с потерями. / Дж. А. Барелл, Л. Питер / ТИИЭР, 1979, Т. 67, № 7, С. 6–18
6. **Финкильштейн М. И.** Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии / М. И. Финкильштейн, В. А. Кутев, В. П. Золотарев. – М., 1986. – 128 с.
7. **Селезов И. Т.** Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / И. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос, В. В. Яковлев. – К., 1985. – 136 с.

8. **Колодий Б. И.** Рассеяние электромагнитных волн на мелких дефектах в плоскостойких средах / И. И. Колодий, А. А. Орловский, В. В. Панасюк. – К., 1985. – 132 с.
9. **Дмитриев В. И.** Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М.: МГУ, 1987. – 168 с.
10. **Колтон Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М., 1987. – 312 с.
11. **Яровой А. Г.** Метод поверхностных потенциалов в задаче дифракции на пронизаемом цилиндре произвольного сечения в слоистой среде // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1992, Т.35, №1, С. 67 – 78.
12. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М., 1977. – 736 с.
13. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. / В. С. Владимиров. – М., 1988. – 512 с.
14. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. / С. Г. Михлин – С.-Пет., 2002. – 576 с.
15. **Гринберг Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. / Г. А. Гринберг – М.-Л., 1948. – 727 с.
16. **Рябенский В. С.** Введение в вычислительную математику. / В. С. Рябенский – М., 2008. – 284 с.
17. **Михлин С. Г.** Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математики и техники. / С. Г. Михлин – М.- Л., 1947. – 304 с.
18. **Пашенко В. О.** Електромагнітна взаємодія ширококугових зондувальних полів та ортотропних композитів із діелектричним покриттям / В. О. Пашенко, Н. О. Матвєєва. // Вісник Дніпропетр. ун-ту: Серія «Фізика, Радіоелектроніка.» – 2004. – Вип.12. – С.14 – 20.

Надійшла до редколегії 16.02.2011